CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)
A.A. 2024/25 - Prova 2025-06-05

La durata della prova è di **120 minuti**. *Fornire risposte dettagliate.*

Problema 1

C'è un contenitore con 20 lampadine a LED di tipo A e 10 di tipo B (30 in tutto), dall'esterno indistinguibili. Si sa però che ogni lampadina di tipo A si accende con probabilità 93%, mentre ogni lampadina di tipo B si accende con probabilità 99%, ciascuna indipendentemente dalle altre. Si estraggono una alla volta, senza rimpiazzo, tutte le lampadine e si prova ad accenderle (ciascuna una sola volta).

1. Qual è la probabilità che la prima lampadina estratta si accenda?
2. Sapendo che la prima lampadina estratta si acende, è più probabile che sia di tipo A o B?
3. Sapendo che la prima lampadina estratta si accende, qual è la probabilità che l'ultima lampadina estratta sia dello stesso tipo della prima?

Una soluzione:

1. Poniamo $X_1, \ldots, X_{30} \in \{A, B\}$ il tipo delle lampadine estratte. Poniamo C = 'la prima lampadina estratta si accende'. Troviamo

$$P(C) = P(C|X_1 = A)P(X_1 = A) + P(C|X_1 = B)P(X_1 = B) = 93\% \cdot \frac{2}{3} + 99\% \cdot \frac{1}{3} = 95\%.$$

2. Usando Bayes si tratta di confrontare

$$\frac{P(X_1 = A|C)}{P(X_1 = B|C)} = \frac{P(X_1 = A)L(X_1 = A; C)}{P(X_1 = B)L(X_1 = B; C)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 93\%}{\frac{1}{3} \cdot 99\%} = \frac{2 \cdot 93}{99} > 1$$

quindi è più probabile che sia del tipo A.

3.Si tratta di estrazioni senza rimpiazzo: si può suddividere nei due casi: entrambe tipo A, $X_1 = X_{30} = A$, con probabilità $20/30 \cdot 19/29 \cdot 93\%$ (perché non sappiamo nulla sulle estrazioni in mezzo), entrambe di tipo B, $X_1 = X_{30} = B$, con probabilità $10/30 \cdot 9/29 \cdot 99\%$. Sommandoli otteniamo

$$P(\text{stesso tipo e } C\ ) = \frac{2}{3} \cdot 1929 \cdot 93\% + \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{29} \cdot 99\% \approx 50.86\%$$

La probabilità condizionata si ottiene dividendo per $P(C) = 95\%$ calcolata sopra, quindi

$$P(\text{stesso tipo } |C) = \frac{50,86}{95} \approx 53,53\%.$$

Problema 2

Dato un parametro $\theta > 0$, si consideri la densità di probabilità data da

$$p(x|\theta) := \begin{cases} c(\theta)x & \text{se } x \in (0, 1/\theta) \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

e n variabili indipendenti $(X_1, \ldots, X_n)$ tutte con densità $p(x|\theta)$.

1. Determinare la costante $c(\theta)$ in modo che $x \mapsto p(x|\theta)$ sia una funzione di densità. Calcolare il valor medio e la mediana di X_1 (in funzione di θ).
2. Calcolare la densità e il valor medio di $1/X_1$ (in funzione di θ).
3. Fornire una stima di massima verosimiglianza per θ avendo osservato $X_1 = x_1, \ldots X_n = x_n$.

Una soluzione:

1. Si tratta di imporre che l'integrale valga 1. Poiché $\int_0^{1/\theta} x dx = \theta^{-2}/2$, si trova che $c(\theta) = 2\theta^2$. Per il valor medio si calcola $2\theta^2 \int_0^{1/\theta} x^2 dx = \frac{2}{3}\theta^{-1}$. Per la mediana si impone che la CDF valga $1/2$, e si trova quindi $\theta^2 m^2 = 1/2$, da cui $m = \theta^{-1}/\sqrt{2}$.

2. Per il valor medio calcoliamo $2\theta^2 \int_0^{1/\theta} 1/x \cdot x dx = 2\theta$. Per la densità basta usare il cambio di variabile, si trova che per $y > \theta$ la densità vale $2\theta^2/y^3$, altrimenti vale 0.

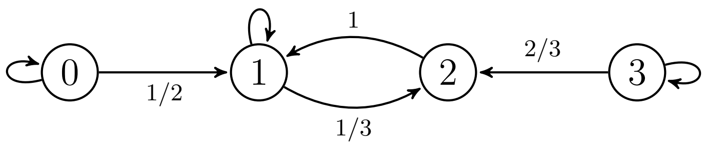
3. Scriviamo la funzione di verosimiglianza, ossia

$$L(\theta; x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^n p(x_i|\theta) = 2^2 \theta^n \prod_{i=1}^n x_i,$$

purché $x_i < 1/\theta$ per ogni i, ossia $\theta < 1/x_i$ per ogni $i = 1, \ldots, n$ (altrimenti $L(\theta) = 0$). Dovendo massimizzare conviene quindi prendere θ più grande possibile compatibilmente con la condizione trovata, quindi $\theta < \max_{i=1,\ldots,n} 1/x_i = 1/\min_{i=1,\ldots,n} x_i$, quindi $\theta_{MLE} = 1/\min_{i=1,\ldots,n} x_i$.

Problema 3

Si consideri una catena di Markov $(X_n)_n$ con probabilità di transizione rappresentate in figura (completare con le probabilità mancanti) e tale che $P(X_0 = 0) = P(X_0 = 3) = 1/2$.



1. Classificare gli stati e calcolare tutte le distribuzioni invarianti.
2. Calcolare il valore atteso di X_2.
3. Avendo osservato $X_{10} \in \{1, 2\}$ dire se è più probabile che sia $X_0 = 0$ o $X_0 = 3$.

Una soluzione:

1. Gli stati $\{0, 3\}$ sono transitori, i rimanenti irriducibili. Dal bilancio di flusso $\pi_1/3 = \pi_2$, qundi l'unica distribuzione invariante è $\pi = (0, 3/4, 1/4, 0)$. 2. Posta Q la matrice di transizione, si può calcolare $(1/2, 0, 0, 1/2)Q$ e poi $(1/2, 0, 0, 1/2)Q^2 \approx (0.125, 0.625, 0.194, 0.056)$. Il valor medio è quindi $0.625 + 2 \cdot 0.194 + 3 \cdot 0.056 \approx 1.18$.

3. Siccome inizialmente le due alternative sono equiprobabili, basta confrontare le verosimiglianze:

$$L(X_0 = 0; X_{10} \in \{1, 2\}) = P(X_{10} \in \{1, 2\} \,|X_0 = 0) = 1 - P(X_{10} = 0) = 1 - 2^{-10}$$

e similmente

$$L(X_0 = 3; X_{10} \in \{1, 2\}) = 1 - 3^{-10},$$

che però è leggermente più grande. Quindi, anche se di poco, è più probabile che sia $X_0 = 3$.